

# Prüfungsvorbereitung Analysis 2012

## A Ableitungen

1. Bestimme jeweils die 1. und 2. Ableitung der Funktion:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f_a(x) = \frac{1}{3}x(x-3a)^2 & \text{b)} f(x) = tx e^{-bx+1} \\ \text{c)} f_a(x) = a\sqrt{x} - \ln(ax^2) & \text{d)} f_a(x) = x^2 \cdot \sqrt{2x+a} \\ \text{e)} f(x) = \frac{3-x^2}{2ex} & \text{f)} f_a(x) = -\cos 2x + 2 \sin x \end{array}$$

2. Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{2}e^x(x^2 - 6x + 10)$ . Weise nach, dass für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ( $x \neq 2$ ) der Term  $\frac{f''(x)}{f'(x)-f'''(x)}$  eine Konstante ist und ermittle deren Wert.

## B Lokale Extrema: Wendepunkte

3. Gegeben sind die Funktionen  $f_a$  mit  $f_a(x) = (x + \frac{1}{a}) \cdot e^{-ax}$

Bestimme die Koordinaten der lokalen Extrempunkte sowie die Art der Extrema. Ermittle die Koordinaten der Wendepunkte der Funktionen  $f_a$  und die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Wendepunkte liegen.

4. Weise nach, dass alle lokalen Extrempunkte der Funktionen  $f_a$  mit  $f_a(x) = a\sqrt{x} - \ln x$  auf dem Graphen der Funktion  $y = k(x) = \ln \frac{e^2}{x}$  liegen

5. Gesucht ist die Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, die den Wendepunkt  $W(1; 2)$ , eine Nullstelle bei  $-1$  und einen Extrempunkt an der Stelle  $x = 2$ . Gib die Gleichung der Funktion, die Koordinaten der Extrempunkte sowie deren Art an.

## C Stammfunktionen

6. Ermittle zu den gegebenen Funktionen jeweils eine Stammfunktion

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f_a(x) = \frac{x^2+2a}{2x} & \text{b)} f(x) = -\frac{1}{3}e^{-2x} \\ \text{c)} f_a(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} & \text{d)} f_a(x) = \frac{3x^2}{k+x^3} \end{array}$$

7. Weise nach, dass die Funktion  $F$  mit  $F_a(x) = (a+x)\cdot \ln(a+x) + (a-x) \cdot \ln(a-x)$  eine Stammfunktion der Funktion  $f(x) = \ln(\frac{a+x}{a-x})$  ist.

8. Bestimme mithilfe der partiellen Integration eine Stammfunktion:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} & \text{b)} f(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sin x \\ \text{c)} f(x) = ax \cdot \ln x & \text{d)} g(x) = x^2 \cdot \sin x \end{array}$$

9. Zeige durch Integration, dass die Funktion  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \cdot |\ln|x+3||$  eine Stammfunktion von  $f(x) = \frac{x^2-4}{x+3}$  ( $x \neq -3$ ) ist. (Tipp: Polynomdivision nutzen)

## D Flächenberechnung

10. Bestimme  $k \in \mathbb{R}$  so, dass der Graph der Funktion  $f$  mit der x-Achse eine Fläche mit dem gegebenen Inhalt einschließt.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = -2x^2 + kx; A = 9 & \text{b)} f(x) = kx^3 + 4x; A = 16 \end{array}$$

11. Gegeben sind die Funktionen  $f(x) = \sqrt[3]{9 - \frac{1}{2}x^2}$  sowie der Punkt  $P(4; f(4))$ . Im Punkt  $P$  wird die Tangente  $t$  an den Graphen gelegt. Der Graph von  $f$ , die Tangente  $t$  und die x-Achse schließen eine Fläche vollständig ein. Ermittle deren Inhalt.

12. Gegeben sind Funktionen  $f_a$  mit  $f_a(x) = \frac{1}{a}x^3 - ax$  ( $a > 0$ ). Jede der Funktionen  $f_a$  schließt im IV. Quadranten mit der x-Achse eine Fläche vollständig ein. Ermittle den Inhalt der Fläche in Abhängigkeit von  $a$ . Für welchen Wert von  $a$  hat diese Fläche einen Inhalt von 6,75 FE?

13. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{4}{x^2}$ . Im Punkt  $P(2; f(2))$  wird die Tangente an den Graphen von  $f$  gelegt. Für  $b \geq 3$  sei  $A_b$  der Inhalt, der im I. Quadranten vom Graphen von  $f$ , der Tangente  $t$  und der Geraden  $x = b$  eingeschlossenen Fläche. Berechne  $A_b$ . Was ergibt sich für  $b \rightarrow \infty$ ?

## E Rotationskörper

14. Die Graphen der Funktionen  $f(x) = \frac{1}{4}x^2$  und  $g(x) = 2\sqrt{x}$  schließen eine Fläche  $A$  ein. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der bei Rotation dieser Fläche

- a) um die x-Achse
- b) um die y-Achse

15. Die Graphen der Funktionenschlair  $f_a$  mit  $f_a(x) = ax \cdot \sqrt{9-x^2}$  sollen im I. Quadranten um die x-Achse rotieren. Das Rotationsvolumen beträgt  $64,8\pi$ . Bestimme für diesen Fall den Parameter  $a$ .

## F Extremwertaufgaben

16. Gegeben ist die Funktion  $f_1(x) = e - e^{ikx}$ . Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt  $R$ . Im Punkt  $R$  existieren an den Graphen die Tangente  $t$  und die Normale  $n$ . Diese schneiden aus der x-Achse eine Strecke aus. Bestimme  $t$  so, dass die Länge dieser Strecke eine Minimum wird und gib die minimale Länge an.

17. In die vom Graphen von  $f(x) = x - \sqrt{2x+5}/4$  mit den Koordinatenachsen eingeschlossene Fläche wird ein Rechteck eingeschrieben, so dass ein Eckpunkt im Koordinatenursprung und ein weiterer auf dem Graphen von  $f$  liegt. Bestimme die Koordinaten dieses Punktes so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird.

18. Für jedes  $k > 0$  wird im Punkt  $R(1; f(1))$  die Tangente  $t_k$  an den Graphen von  $f_k(x) = (\ln x)^2 - k \ln x + 0,75$  gelegt. Die Tangente schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten  $P$  und  $Q$ . Ermittle den Wert für  $k$ , für den der Flächeninhalt des Dreiecks  $\Delta POQ$  ( $O$  ist der Koordinatenursprung) am kleinsten wird. Gib  $A_{\min}$  an.

## G Tangenten - Berührungspunkte - Schnittwinkel

19. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^3 - 4x$ . Es existiert eine Tangente  $t$  an den Graphen von  $f$ , die die y-Achse im Punkt  $S(0; 2)$  schneidet. Bestimme die Koordinaten des Berührungs punktes und eine Gleichung der Tangente.

20. Gegeben sind die Funktionen  $f(x) = \frac{9}{x-3}$  und  $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + t$ . Für welchen Wert des Parameters  $t$  schneiden sich die Graphen von  $f$  und  $g$  orthogonal? Gib die Koordinaten des Schnittpunktes und die Gleichungen der Tangenten für diesen Fall an.

# Prüfungsvorbereitung Analysis 2012

## A Ableitungen

1. Bestimme jeweils die 1. und 2. Ableitung der Funktion:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f_a(x) = \frac{1}{3}x(x-3a)^2 & \text{c)} f_a(x) = a\sqrt{x} - \ln(ax^2) \\ \text{b)} f(x) = tx - \ln(x+1) & \text{d)} f_a(x) = x^2 \cdot \sqrt{2x+a} \\ \text{d)} f_a(x) = \frac{x^2+2a}{2x} & \text{e)} f(x) = \frac{3-x^2}{2x} \\ \text{f)} f_a(x) = -\cos 2x + 2 \sin x & \end{array}$$

2. Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{2}e^x(x^2 - 6x + 10)$ . Weise nach, dass für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ( $x \neq 2$ ) der Term  $\frac{f''(x)-f'''(x)}{f'(x)-f''(x)}$  eine Konstante ist und ermittle deren Wert.

## B Lokale Extrema: Wendepunkte

3. Gegeben sind die Funktionen  $f_a$  mit  $f_a(x) = (x + \frac{1}{a}) \cdot e^{-ax}$

Bestimme die Koordinaten der lokalen Extrempunkte sowie die Art der Extrema. Ermittle die Koordinaten der Wendepunkte der Funktionen  $f_a$  und die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Wendepunkte liegen.

4. Weise nach, dass alle lokalen Extrempunkte der Funktionen  $f_a$  mit  $f_a(x) = a\sqrt{x} - \ln x$  auf dem Graphen der Funktion  $y = k(x) = \ln \frac{e^2}{x}$  liegen

5. Gesucht ist die Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, die den Wendepunkt  $W(1; 2)$ , eine Nullstelle bei  $-1$  und einen Extrempunkt an der Stelle  $x = 2$ . Gib die Gleichung der Funktion, die Koordinaten der Extrempunkte sowie deren Art an.

## C Stammfunktionen

6. Ermittle zu den gegebenen Funktionen jeweils eine Stammfunktion

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f_a(x) = \frac{x^2+2a}{2x} & \text{b)} f(x) = -\frac{1}{3}e^{-2x} \\ \text{b)} f(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} & \text{c)} f_a(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} \\ \text{d)} f_a(x) = \frac{3x^2}{k+x^3} & \end{array}$$

7. Weise nach, dass die Funktion  $F$  mit  $F_a(x) = (a+x)\cdot \ln(a+x) + (a-x) \cdot \ln(a-x)$  eine Stammfunktion der Funktion  $f(x) = \ln(\frac{a+x}{a-x})$  ist.

8. Bestimme mithilfe der partiellen Integration eine Stammfunktion:

$$\text{a)} f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{b)} f(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sin x \quad \text{c)} f(x) = ax \cdot \ln x \quad \text{d)} g(x) = x^2 \cdot \sin x$$

9. Zeige durch Integration, dass die Funktion  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \cdot \ln|x+3|$  eine Stammfunktion von  $f(x) = \frac{x^2-4}{x+3}$  ( $x \neq -3$ ) ist. (Tipp: Polynomdivision nutzen)

## D Flächenberechnung

10. Bestimme  $k \in \mathbb{R}$  so, dass der Graph der Funktion  $f$  mit der x-Achse eine Fläche mit dem gegebenen Inhalt einschließt.

$$\text{a)} f(x) = -2x^2 + kx; \quad A = 9 \quad \text{b)} f(x) = kx^3 + 4x; \quad A = 16$$

11. Gegeben sind die Funktionen  $f$  mit  $f(x) = \sqrt{9 - \frac{1}{2}x^2}$  sowie der Punkt  $P(4; f(4))$ . Im Punkt  $P$  wird die Tangente  $t$  an den Graphen gelegt. Der Graph von  $f$ , die Tangente  $t$  und die x-Achse schließen eine Fläche vollständig ein. Ermittle deren Inhalt.

12. Gegeben sind Funktionen  $f_a$  mit  $f_a(x) = \frac{1}{a}x^3 - ax$  ( $a > 0$ ). Jede der Funktionen  $f_a$  schließt im IV. Quadranten mit der x-Achse eine Fläche vollständig ein. Ermittle den Inhalt der Fläche in Abhängigkeit von  $a$ . Für welchen Wert von  $a$  hat diese Fläche einen Inhalt von 6,75 FE?

13. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{4}{x^2}$ . Im Punkt  $P(2; f(2))$  wird die Tangente an den Graphen von  $f$  gelegt. Für  $b \geq 3$  sei  $A_b$  der Inhalt, der im I. Quadranten vom Graphen von  $f$ , der Tangente  $t$  und der Geraden  $x = b$  eingeschlossenen Fläche. Berechne  $A_b$ . Was ergibt sich für  $b \rightarrow \infty$ ?

## E Rotationskörper

14. Die Graphen der Funktionen  $f(x) = \frac{1}{4}x^2$  und  $g(x) = 2\sqrt{x}$  schließen eine Fläche  $A$  ein. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der bei Rotation dieser Fläche  
 a) um die x-Achse  
 b) um die y-Achse

15. Die Graphen der Funktionenschar  $f_a$  mit  $f_a(x) = ax \cdot \sqrt{9-x^2}$  sollen im I. Quadranten um die x-Achse rotieren. Das Rotationsvolumen beträgt  $64,8\pi$ . Bestimme für diesen Fall den Parameter  $a$ .

## F Extremwertaufgaben

16. Gegeben ist die Funktion  $f_1(x) = e - e^x$ . Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt  $R$ . Im Punkt  $R$  existieren an den Graphen die Tangente  $t$  und die Normale  $n$ . Diese schneiden aus der x-Achse eine Strecke aus. Bestimme  $t$  so, dass die Länge dieser Strecke eine Minimum wird und gib die minimale Länge an.

17. In die vom Graphen von  $f(x) = x - \sqrt{2x+5}/4$  mit den Koordinatenachsen eingeschlossene Fläche wird ein Rechteck eingeschrieben, so dass ein Eckpunkt im Koordinatenursprung und ein weiterer auf dem Graphen von  $f$  liegt. Bestimme die Koordinaten dieses Punktes so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird.

18. Für jedes  $k > 0$  wird im Punkt  $R(1; f(1))$  die Tangente  $t_k$  an den Graphen von  $f_k(x) = (\ln x)^2 - k \ln x + 0,75$  gelegt. Die Tangente schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten  $P$  und  $Q$ . Ermittle den Wert für  $k$ , für den der Flächeninhalt des Dreiecks  $\Delta POQ$  ( $O$  ist der Koordinatenursprung) am kleinsten wird. Gib  $A_{\min}$  an.

## G Tangenten - Berührungspunkte - Schnittwinkel

19. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^3 - 4x$ . Es existiert eine Tangente  $t$  an den Graphen von  $f$ , die die y-Achse im Punkt  $S(0; 2)$  schneidet. Bestimme die Koordinaten des Berührungs punktes und eine Gleichung der Tangente.

20. Gegeben sind die Funktionen  $f(x) = \frac{9}{x-3}$  und  $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + t$ . Für welchen Wert des Parameters  $t$  schneiden sich die Graphen von  $f$  und  $g$  orthogonal? Gib die Koordinaten des Schnittpunktes und die Gleichungen der Tangenten für diesen Fall an.